4. A VONATKOZTATÁSI ELLIPSZOID ELHELYEZÉSE. ÁTSZÁMÍTÁS VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK KÖZÖTT

41. A feladat leírása

A földfelszínen kijelölt alaphálózati pontok, vagy a geoid megfelelő pontjainak térbeli helyzetét – a jelenlegi geodéziai gyakorlat döntő többségében – forgási ellipszoid alakú geodéziai alapfelületre vonatkozó ellipszoidi földrajzi koordinátákkal adjuk meg. Célszerűségi okból megkívánjuk, hogy ez az alapfelület, a *vonatkoztatási ellipszoid* a a Föld méretét és alakját jól megközelítse. Az eddigiekben megismertük azokat a módszereket, amelyekkel az ezt a kívánalmat kielégítő ellipszoidi jellemzők a mérési eredményeink alapján kiszámíthatók.

A koordináta-számításhoz azonban még az is szükséges, hogy ezt, a most már ismert méretű és alakú (elképzelt) ellipszoidot a Föld fizikai felszínén kijelölt alaphálózati pontokhoz, vagy a geoidhoz (más szóval a természethez) és a már elképzelt földi térbeli derékszögű koordináta-rendszerünk valamelyik (jelenleg az ITRS) megvalósulásához képest a *térben elhelyezzük.* Az ily módon ismert méretű, alakú és elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoid valósítja meg helymeghatározó koordinátaszámításaink felületi koordináta-rendszerét.

Ha földfelszíni geodéziai alappont-hálózatunkat **mesterséges holdas** (szatellitageodéziai) módszerekkel (pl. GPS) határozzuk meg, akkor a WGS84 rendszer már magába foglalja a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezését is. A szintellipszoid potenciálelméleti összefüggéseiben, ugyanis, benne van az a feltétel, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontját, és vele együtt az ellipszoid geometriai középpontját a Föld tömegközéppontjába helyezzük. Az ellipszoid kistengelyét, pedig a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer *Z* tengelyére, ellipszoidi kezdő meridiánsíkját ennek *X* tengelyére illesztjük. Így, a GPS-hálózatok esetében a vonatkoztatási ellipszoid illeszkedik a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulásának) tengelyeire, és ezzel együtt a Föld tömegközéppontjára. A vonatkoztatási ellipszoid ilyen elhelyezését *geocentrikus elhelyezésnek* mondjuk.

Hagyományos geometriai módszerekkel (szög- és távolságmérésekkel) meghatározott **geodéziai alaphálózatok** esetében a koordináta-számításaink vonatkoztatási ellipszoidjának méretét, alakját és térbeli elhelyezését jellemző mérőszámokat a *geodéziai dátumban* foglaljuk össze.

Az *elhelyezési adatokat* a gyakorlatban háromféle módon lehet megadni. Egyik lehetséges megadási mód, ha rögzítjük a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontjának a Föld tömegközéppontjához viszonyított X_0, Y_0, Z_0 (geocentrikus) térbeli derékszögű koordinátáit.

A másik két megadási mód esetében kiválasztjuk a számítandó geodéziai alaphálózat valamely (általában központi fekvésű) csillagászati-geodéziai (*Laplace*-) pontját P_1 *csillagászati kiindulópontként*, és megadjuk a

(φ_1, λ_1, h_1) ellipszoidi földrajzi koordinátáit, vagy

(ξ_1, η_1, N_1) függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát

a szóban lévő geodéziai alapfelületre vonatkozóan. Ezek a mennyiségek kijelölik az ellipszoidnak a csillagászati kiindulóponton (pontosabban ennek geoidi megfelelőjén) áthaladó felületi normálisát és ezen az ellipszoid felületnek a geoidtól mért távolságát. Ezen adatok mellett még hallgatólagosan mindig feltételezzük a vonatkoztatási ellipszoid kistengelyének a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS, megvalósulásának) *Z* tengelyével, és az ellipszoidi kezdő meridiánsíknak a földi koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS, megvalósulásának) *X* tengelyével párhuzamos helyzetét. Ezt azimútméréssel a korábban már megismert, az azimútokra vonatkozó (322.5) *Laplace*-egyenleten keresztül biztosítjuk. Ez utóbbi műveletet az ellipszoid *tájékozásának* nevezzük.

A csillagászati kiindulópontban a geodéziai dátum megadásával lehetségessé válik összefüggő geodéziai alaphálózat további pontjainak koordináta-számítása az I. geodéziai főfeladat sorozatos alkalmazásával (ld. Geodéziai alaphálózatok tantárgy).

A koordináta-számítás szempontjából a vonatkoztatási ellipszoidot a Földhöz viszonyítva elvileg teljesen tetszőlegesen helyezhetjük el. A gyakorlati célszerűség azonban mégis azt kívánja, hogy az ellipszoidot olyan helyzetbe hozzuk, hogy a természetben kijelölt geodéziai alaphálózatunk az ellipszoidnak is arra a felületdarabjára (arra a részére) essék, ahol a földfelszínen is, a valóságban van. Ez ugyanis azzal az előnnyel jár, hogy egyrészt alappontjaink ellipszoidi koordinátái a mért szintfelületi koordinátáktól csak kis mértékben fognak különbözni, így a pontok valódi földfelszíni helyzetét is jó közelítéssel jellemzik, másrészt az egész hálózatunk az ellipszoidnak arra a részére kerül, amelynek görbületi viszonyai a hálózat területén a geoid alakjának megfelelnek. Így, a természetnek az ellipszoid felületére leképezésével járó elkerülhetetlen vetítési torzulások a lehetőségig csökkenthetők.

Megjegyezzük, hogy a választott méretű és alakú vonatkoztatási ellipszoidunk (helymeghatározásainkhoz viszonyítási alapul szolgáló) egyrészt ellipszoidi felületi, másrészt (geometriai középpontja, kistengelye és ellipszoidi kezdő meridiánsíkja által) térbeli derékszögű koordináta-rendszert valósít meg. Ezt a koordináta-rendszert az elhelyezési és a tájékozási adatokkal földi ponthoz (valamely geodéziai alaphálózati ponthoz, vagy a Föld tömegközéppontjához) kötjük. Ebben az értelemben *minden geodéziai dátum egy-egy (helyi, vagy geocentrikus) vonatkoztatási rendszer* [161.] *megvalósulásaként is felfogható.*

A geodézia fejlődéstörténete során a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének háromféle gyakorlati megoldása alakult ki, amelyeket a következőkben fogunk megismerni.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton az elhelyezési adatok geometriai tartalmát!

- A geodéziai dátum megadásának háromféle módja miért egyenértékű egymással?

42. A vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének gyakorlati megoldásai

421. Az önkényes elhelyezés

Az eddigiekből már látható, hogy a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének gyakorlati megoldásához a geodéziai alaphálózat legalább egy pontjában, a P_1 csillagászati kiindulópontban kozmikus geodéziai módszerekkel (csillagészleléssel) meg kell mérni a pont Φ_1, Λ_1 szintfelületi földrajzi koordinátáit, szintezéssel, esetleg trigonometriai magasságméréssel meg kell határozni a H_1 tengerszint feletti magasságát és a tájékozás céljára ugyancsak kozmikus geodéziai módszerrel mérni kell a pontból kiinduló legalább egy hálózati oldal A_1 szintfelületi azimútját.

A csillagászati-geodéziai mérések eredményeit a pont magasságának ismeretében (a függővonal görbültsége miatt a már megismert (3322.2.) összefüggéssel) általában a tengerszintre kell átszámítani. Így végeredményben a mért és átszámított szintfelületi földrajzi koordináták megadják a csillagászati kiindulópont geoidi megfelelőjében a szintfelületi normális (a geoidi helyi függőleges) térbeni helyzetét.

Ha ezeket a méréseket valóban csak egyetlen pontban, a csillagászati kiindulópontban végeztük el, akkor a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének legegyszerűbb esete, az *önkényes elhelyezés* abból áll, hogy a már említett gyakorlati szempontok [41.] figyelembe vételével a csillagászati kiindulópont ellipszoidi koordinátáit a *mért szintfelületi értékek közelében tetszés szerint felvesszük.*

Ennek kézen fekvő megoldása az, hogy az ellipszoidi helymeghatározó adatok értékrendszerét a pont geoidi megfelelőjének szintfelületi földrajzi koordinátáival és tengerszint (geoid) feletti magasságával azonos értékben állapítjuk meg, azaz

$$\varphi_1 \equiv \Phi_1$$
$$\lambda_1 \equiv \Lambda_1$$
$$h_1 \equiv H_1.$$

Ez más szóval azt jelenti, hogy ebben a pontban a függővonal-elhajlás összetevők és a geoid-ellipszoid távolság értékrendszerét nulla értékben vesszük fel, vagyis

$$\xi = 0$$
$$\eta = 0$$
$$N_1 = 0.$$

Ezzel a megoldással azt érjük el, hogy vonatkoztatási ellipszoidunk kiválasztott felületi normálisát a csillagászati kiindulópontban (pontosabban ennek geoidi megfelelőjében) a pont *geoidi helyi függőlegesével egybeejtjük*, és az ellipszoid felszínét abban a pontban a geoidhoz *érintő helyzetbe* hozzuk.

Az ezzel a felvétellel a csillagászati kiindulópont geoidi megfelelőjében érintő helyzetbe hozott ellipszoidunk az e ponton átmenő kiválasztott felületi normálisa körül még tetszés szerint forgatható a térben. Az ellipszoidnak a korábban leírt *tájékozására,* azaz a tengelyek párhuzamosságának biztosítására használjuk fel az *azimútmérés* eredményét.

A csillagászati kiindulópontból kiágazó kiválasztott alaphálózati oldal mért (és a geoidra átszámított) szintfelületi (geoidi) azimútját a (322.5) *Laplace*-egyenletbe beírjuk. Esetünkben nulla értékű függővonal-elhajlás összetevőkkel számolva, megkapjuk ebből a szóban lévő hálózati oldalnak megfelelő normálmetszet *ellipszoidi azimútját* olyan helyzetű ellipszoidra vonatkozóan, amelynek kistengelye a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg ITRS megvalósulásának) Z tengelyével, ellipszoidi kezdő meridiánsíkja ennek X tengelyével, (a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben) párhuzamos. Ez az ellipszoidi azimút ebben a különleges esetben éppen a geoidi azimúttal egyenlő.

(Megjegyezzük, hogy a további koordináta-számításhoz ezt a kiinduló ellipszoidi azimútértéket, a Geodéziai alaphálózatok tárgyban megismert módon, a geodéziai vonalra még át kell számítani!)

Az így elhelyezett és tájékozott vonatkoztatási ellipszoidunk geometriai középpontja, kistengelye és ellipszoidi kezdő meridiánsíkja – a földi térbeli derékszögű koordinátarendszer (valamelyik, jelenleg ITRS megvalósulásához viszonyítva eltolt helyzetű) – (x,y,z) *helyi* térbeli derékszögű koordináta-rendszert is meghatároz.

Ezzel az eljárással tehát minden egyes önálló geodéziai alaphálózathoz (a csillagászati kiindulópontjukban) egy-egy önálló koordináta-rendszert létesítünk, amelyek egymással csak annyi kapcsolatban vannak, hogy koordináta-tengelyeik (a mérési megbízhatóságon belül) egymással párhuzamosak. A tengelyek egymáshoz viszonyított eltolásának mértéke viszont ismeretlen, és az eddigi adatokból nem is határozható meg.

Az ily módon végzett önkényes elhelyezés előnyei:

- egyszerűsége,
- csak egyetlen pontban igényel csillagászati-geodéziai (földrajzi helymeghatározás) méréseket és
- a csillagászati kiindulópont környezetében a földfelszínnek az ellipszoidra vetítésével járó torzulásokat a lehető legkisebbre csökkenti.

Ezekkel szemben hátránya nagyobb kiterjedésű hálózatok esetében mutatkozik, amikor a hálózatban a csillagászati kiindulóponttól távolodva a torzulások a szélek felé egyre növekednek. Így a torzulási viszonyok a hálózat területén igen különbözőek lehetnek. Ezen a hátrányon segít a vonatkoztatási ellipszoid *relatív* elhelyezése.

Feladatok:

- Szemléltessük vázlaton a $\xi_1 = \eta_1 = N_1 = 0$ önkényes elhelyezés geometriai tartalmát!
- Mutassuk be ugyanezen a vázlaton a hálózat tetszőleges P_i ($i \neq 1$) pontjainak függővonal-elhajlását és a geoid-ellipszoid távolságát! Hogyan oszlanak ezek el a hálózat területén?
- Önkényes elhelyezés esetén általában milyen helyzetbe kerül az ellipszoid geometriai középpontja a Föld tömegközéppontjához viszonyítva?
- Mi biztosítja a megfelelő koordináta-tengelyeknek a megkívánt párhuzamosságát, miért, és milyen megbízhatósággal?
- Miért határozzuk meg a csillagászati kiindulópont szintfelületi földrajzi koordinátáit?

422. A simuló (relatív) elhelyezés

A vonatkoztatási ellipszoid simuló elhelyezéséhez az szükséges, hogy a geodéziai alaphálózat *több pontjában* is végezzünk csillagászati-geodéziai (földrajzi helymeghatározás) méréseket és – bizonyos esetben – magasságmeghatározást. Ez esetben ugyanis lehetségessé válik az elhelyezési adatok kiszámítása oly módon, hogy a választott vonatkoztatási ellipszoidot *a hálózat egész területén simuló helyzetbe hozzuk a geoidhoz.* Így a természetben kijelölt hálózatnak az ellipszoidra vetítésével járó elkerülhetetlen torzulások legalább a lehető legkedvezőbb eloszlásban fogják terhelni a hálózatunkat.

A simuló elhelyezésnek kétféle megoldása alakult ki a gyakorlatban attól függően, hogy a simuló helyzet előállításakor az ellipszoidnak csak a saját felszíne irányában végzendő (ún. vízszintes), *kétdimenziós*, vagy vízszintes és függőleges, azaz *háromdimenziós* mozgatását tesszük lehetővé. Megjegyezzük, hogy a csillagászati kiindulóponton kívüli csillagászati geodéziai pontok magasságára csak ez utóbbi esetben van szükség.

Az előbb említett kétdimenziós (felületi) megoldás *Helmert* nevéhez fűződik és gyakran „*transzlatív függővonal-elhajlás kiegyenlítésnek*” nevezik. A háromdimenziós (térbeli) megoldást *Vening Meinesz* dolgozta ki és *projektív függővonal-elhajlás kiegyenlítés* néven ismert a geodéziai gyakorlatban. Megjegyezzük, hogy valójában egyik eljárás sem kiegyenlítés a szó valódi értelmében, hanem a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazása az elhelyezési adatoknak „fölös számú” egyenletből a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimumfeltétele melletti kiszámítására.

Mindkét számítási eljárásnak általánosabb alakjával már megismerkedtünk a felületek módszerének tárgyalásakor [323.]. A különbség (és egyben az egyszerűsítés) ehhez viszonyítva abban áll, hogy akkor a legjobb simulás érdekében az ellipszoidi. adatok (fél nagytengely és a lapultság) változását is megengedtük a számítás során, sőt éppen ezen ismeretlen változások meghatározása volt az elsődleges célunk. Ezzel egyidejűleg megkaptuk még a simuló méretű és alakú ellipszoid legkedvezőbb elhelyezését és tájékozását biztosító ismeretlen mennyiségek (a csillagászati kiinduló pont ellipszoidi koordinátáinak és a kiinduló oldal ellipszoidi azimútjának) számértékét is. Jelen esetben viszont *már adott* (többnyire nemzetközileg ajánlott) *méretű és alakú ellipszoid* simuló elhelyezését keressük, így az ismeretlenek vektorából elmarad az ellipszoidi adatok változása, és maradnak csak az *elhelyezés és tájékozás adatai.* Így az ismeretlenek száma háromra, illetve a projektív módszer esetében négyre csökken. Egyébként a számítás módszere elvben megegyezik a már megismert eljárásával.

A gyakorlatban azonban ennek kissé módosított két változata terjedt el. A módosítás mindkettőben abban áll, hogy a függővonal-elhajlások négyzetösszegének minimumfeltételéhez még hozzáveszik az azimútra vonatkozó *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegének minimumát is, ezzel mindjárt a legkedvezőbb tájékozást is biztosítva. (A *Laplace*-ellentmondás valamely *Laplace*-pontból kiinduló hálózati oldalra az azimútmérés alapján, a (322.5) *Laplace*-egyenletből kiszámított ellipszoidi azimút és ugyanerre az oldalra a kezdő hálózati oldal azimútjából a mért hálózati szögekkel levezetett ellipszoidi azimút különbsége.)

<u>*Wolf szabatos*</u> (a legkisebb négyzetek módszere szerinti) <u>*megoldása*</u> csak abban különbözik az eredetileg megismert *Helmert*-féle eljárástól, hogy a függővonal-

elhajlások négyzetösszege mellett a *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegét is bevonja a minimumfeltételbe, de különben a számítást a már megismert szabatos eljárás szerint végzi. A kibővített minimumfeltétel miatt a javítási egyenletekben és tisztatag vektorokban is adódik különbség, ugyanis a *Laplace*-egyenletre tekintettel, itt negyedik féle javítási egyenlettípust is fel kell állítani, ha a pontban azimút és hosszúságmérést is végeztek. A tisztatag vektor is bővül a *Laplace*-ellentmondások előzetes értékével.

<u>*Ledersteger közelítő módszerében*</u> külön elégíti ki a függővonal-elhajlásokra vonatkozó minimumfeltételt és ezzel számítja a $d\varphi_1$ és a $d\alpha_1$ ismeretlent, majd külön számítási lépésben elégíti ki a *Laplace*-ellentmondások négyzetösszegének minimumfeltételét, és számítja a $d\lambda_1$ ismeretlent. A módszer közelítő volta ellenére a gyakorlat számára elegendően jó eredményre vezet, és előnye a számítás egyszerűségében és gyorsaságában van.

Végeredményként tehát a csillagászati kiindulópontnak a felvett méretű, alakú és *a hálózat területén a geoidhoz simuló helyzetbe hozott* ellipszoidra vonatkozó ellipszoidi szélességét, hosszúságát, illetve függővonal-elhajlás összetevőit, valamint a kiinduló oldal ellipszoidi azimútját (és esetleg geoid-ellipszoid távolságát, *Vening Meinesz* eljárása esetében) kapjuk. Ezek ismeretében a javítási egyenletekből számíthatók még a hálózat többi csillagászati-geodéziai pontjainak a simuló ellipszoidra vonatkozó függővonal-elhajlás összetevői, a további mért oldalak ellipszoidi azimútja (és esetleg ezen pontok geoid-ellipszoid távolsága) is. Ezen adatokból könnyen képezhetők a csillagászati-geodéziai pontok ellipszoidi koordinátái a mért szintfelületi földrajzi koordináták alapján.

Ily módon a simuló (relatív) elhelyezéssel minden önálló geodéziai alaphálózathoz egy-egy *helyi simuló elhelyezésű* (tehát egymástól független) koordináta-rendszert hozunk létre, amelyek egymással csak annyi kapcsolatban vannak, hogy a koordináta-tengelyeik egymással (a mérési megbízhatóságnak megfelelő mértékben) párhuzamosak, de egymástól ismeretlen távolságban helyezkednek el. A gyakorlat azt mutatja, hogy ezek a távolságok néhányszor 100 m nagyságrendűek, vagy ennél kisebbek, míg a tengelyek párhuzamossága a jelenlegi méréstechnika mellett mintegy 1″-en belül biztosítható.

A megoldásnak minden esetre előnye, hogy a természetnek a simuló elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidra vetítésekor keletkező (elkerülhetetlen) torzulások mértéke és eloszlása a hálózat területén a lehető legkedvezőbb, mert az ellipszoid a geoidhoz igen közeli helyzetben van. A XX. század második feléig (végéig) az egyes országok nagyméretarányú felmérésének alapját képező nemzeti geodéziai alaphálózatok számításához ez volt a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének szinte kizárólagosan használt módszere.

Tudomásul kell venni azonban, hogy a különböző simuló (relatív) elhelyezésű helyi rendszerekben megadott koordináták *közös számítási eljárásba* (pl. azimút- és távolságszámítás a II. geodéziai főfeladat segítségével) *nem vonhatók be*. Ez az országok közötti nemzetközi műszaki, közlekedési (légi, tengeri, felszíni járművek, űreszközök, stb. irányítása), gazdasági, stb. kapcsolatok, együttműködések egyre erőteljesebbé válásával kezdett gondokat okozni. Így gyakorlati igényként jelentkezett az egyes helyi ellipszoidi rendszerek közötti kapcsolat létesítése, illetve *egységes, közös elhelyezésű* vonatkoztatási ellipszoid bevezetése. Ezt a célt szolgálja a vonatkoztatási ellipszoid elhelyezésének harmadik lehetősége, amelynek alkalmazása esetén az itt említett nehézségek nem merülnek fel.

Feladatok:

- Szemléltessük vázlaton a simuló (relatív) elhelyezés alapelvét!
- Mutassuk be vázlaton az egymástól független geodéziai alaphálózatokhoz számított simuló elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidoknak a Föld tömegközéppontjához és forgástengelyéhez viszonyított helyzetét.
- Mi a simuló elhelyezés előnye és hátránya?
- Miben egyezik és miben különbözik a vonatkoztatási ellipszoid simuló elhelyezése a felületek módszerétől?
- Miből származik a *Laplace*-ellentmondás?
- Miért nem lehet az egész geoidhoz egyetlen simuló ellipszoidot illeszteni ezzel a módszerrel?
- Mi a feltétele annak, hogy simuló (relatív) elhelyezést számíthassunk?

423. A geocentrikus elhelyezés

A mai felhasználói igények a korábbi, egymástól független helyi (nemzeti) hálózatok helyett a földfelszín nagy részeire, a földrészekre, sőt az egész Földre kiterjedő (kontinentális, interkontinentális, globális) geodéziai alapponthálózat(ok), geodéziai világhálózat(ok) kialakítását követelik meg. Ez akkor oldható meg, ha a Föld bármely részén kialakított geodéziai hálózat pontjainak koordinátáit egy és ugyanazon (méretű, alakú és elhelyezésű) közös vonatkoztatási ellipszoidon számítjuk.

A jelenlegi gyakorlatban geodéziai vonatkoztatási rendszert csak fizikai módszerrel alkotunk [34.]. Láttuk, hogy ennek eredményeként olyan vonatkoztatási ellipszoid méretét és alakját kapjuk, amely a *geoid egészéhez* úgy simul, hogy geometriai középpontja a Föld tömegközéppontjával, kistengelye a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulásának) *Z,* ellipszoidi kezdő meridiánsíkja annak *X* tengelyével párhuzamos. A vonatkoztatási ellipszoidnak ezt az elhelyezését neveztük *geocentrikusnak.*

Ha geodéziai alaphálózatunkat ilyen (geocentrikus) elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidon akarjuk számítani, akkor az *ellipszoid elhelyezése kötött,* és a geodéziai dátum elhelyezési adatai most a *hálózatunknak az elhelyezését adják meg* az ellipszoidon. De ez utóbbit sem választhatjuk meg szabadon, hiszen a fizikai földfelszín és rajta a geodéziai alaphálózatunk a Föld tömegközéppontjához viszonyítva valamilyen adott természetbeni helyzetben van, amit mérésekkel kell meghatároznunk.

Méréseink eredményeiből geodéziai alaphálózatunk P_1 *kiindulópontjának* a geocentrikus elhelyezésű alapfelületre vonatkozó $(\varphi_1,\ \lambda_1,\ h_1)_{\mathrm{geoc}}$ koordináta-hármasát kell kiszámítani. Ha ezeket tekintjük *hálózatunk elhelyezési adatainak*, azaz

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \lambda_1\\ h_1\end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix}\varphi_1\\ \lambda_1\\ h_1\end{bmatrix}_{geoc} \qquad (423.1)$$

és belőlük számítjuk az I. geodéziai főfeladattal a többi hálózati pont koordinátáit, akkor ez utóbbiak is valamennyien *geocentrikus* ellipszoidi földrajzi koordináták lesznek. Így, a Föld bármely részén, akár egymástól teljesen függetlenül kialakított, (geometriai módszerekkel mért) geodéziai alaphálózatok valamennyi pontjának helyzetét, koordinátáit azonos koordináta-rendszerben ismerjük. Egymástól bármilyen messze fekvő hálózati pontok között számíthatunk távolságot és azimútot a pontok koordinátáiból (a II. geodéziai főfeladat algoritmusával).

Ezzel szemben, valamelyes hátrányként jelentkezik az, hogy, mivel a geocentrikus elhelyezésű ellipszoid a Föld *egész geoidjához* simul, egyes helyeken mintegy ± 130 m-rel eltérhet tőle. Ez pedig a földfelszínnek az ellipszoidra vetítésével járó torzulások szempontjából nem kedvező (pl. nagyméretarányú térképezés). A mai geodéziai gyakorlat , az előnyök mellett, ezt a hátrányt nem tekinti jelentősnek.

A koordináta-számításhoz természetesen itt is szükség van a hálózati *kiinduló oldal* ellipszoidi azimútjára, azaz a *hálózat tájékozására*. Ez meghatározható csillagászati-geodéziai módszerrel, *azimútméréssel*, vagy esetleg a kiinduló oldal másik végpontja geocentrikus ellipszoidi földrajzi koordinátáinak meghatározásával.

A geocentrikus ellipszoidi koordináták meghatározásának legelterjedtebb és jelenleg legmegbízhatóbb módja a *mesterséges holdak geodéziai észlelésén* (pl. GPS-méréseken) alapszik. Tudjuk, hogy belőlük *mindig geocentrikus koordinátákat* kapunk (közvetlenül nem is tudunk mást), mert a mesterséges holdak pályája a Föld tömegközéppontja körül alakul ki (*Kepler* 1. törvénye), és ezért a pályapontok koordinátáit is geocentrikus elhelyezésű koordináta-rendszerben számítják és adják meg (pl. a WGS84 koordináta-rendszere).

A geocentrikus ellipszoidi koordináták meghatározásának másik lehetséges útja, ha a P_1 kiinduló pontban *földrajzi helymeghatározás mérésekkel* meghatározzuk a pont (Φ_1, Λ_1) szintfelületi földrajzi koordinátáit és *szintezéssel* H_1 geoid (tengerszint) feletti magasságát, valamint Δg nehézségi rendellenességekből a pont geocentrikus (korábbi megjelöléssel: abszolút) függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát. Velük a geocentrikus elhelyezés adatai

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{bmatrix}_{geoc} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Lambda_1 \\ H_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1/\cos\varphi_1 \\ N_1 \end{bmatrix}_{geoc} , \tag{423.2}$$

ahol

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ N_1 \end{bmatrix}_{geoc} = \begin{bmatrix} \xi(\Delta g) \\ \eta(\Delta g) \\ N(\Delta g) \end{bmatrix} . \tag{423.3}$$

A függővonal-elhajlás összetevők és a geoid-ellipszoid távolság kapcsolatát a nehézségi rendellenességekkel a Fizikai geodézia tantárgy tárgyalja. Ezek az összefüggések és a normál nehézségi erőtér szerkezetét meghatározó, már megismert képletek [343.] tartalmazzák azt a feltételt, hogy a koordináta-rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjával egybeesik.

Az elérhető megbízhatóság vonatkozásában megjegyezzük, hogy a mesterséges holdakra végzett mérésekből levezetett geocentrikus koordináták középhibája, egyedi pontmeghatározás esetén, közel áll a csillagászati geodéziai mérésekéhez ($\pm 1 \div 5$ m). Ha valamely pont helyzetét valamely világhálózat (ITRF), vagy helyzetünkben az egységes európai hálózat keretpontjaira (EUREF) támaszkodó mérésekkel vezetjük le, a megbízhatóság két nagyságrenddel is jobb lehet. A gravimetriai meghatározásból származó elhelyezési adatok középhibája inkább 10 m nagyságrendű és erősen függ a pont környezetének gravimetriai felmértségétől, így ez a megoldás a mesterséges holdak megjelenése óta már inkább csak elvi jelentőségűvé vált.

A mai geodéziai gyakorlatban egyre inkább elterjed a geodéziai alaphálózatok mesterséges holdas meghatározása (GPS-hálózatok, magyarországi OGPSH). Ezekben természetesen közvetlenül geocentrikus elhelyezésű ellipszoidi koordinátákat számíthatunk. Ugyanakkor számos országban, mint Magyarországon is, közhasználatban vannak a korábban, geometriai módszerekkel mért (hagyományosan kialakított) geodéziai alaphálózatok (is). A felsőgeodézia egyik fontos és időszerű feladata ezeknek, a már korábban *helyi simuló ellipszoidon kiszámolt hálózatoknak valamely világhálózatba beillesztése.* Ilyen esetekben a meglévő helyi hálózat több pontján végzett mesterséges hold észleléssel geocentrikus (pl. WGS) koordinátákat is meghatározunk, és az így nyert – mindkét rendszerben ismert koordinátájú pontok alapján – a többi pontok helyi rendszerű koordinátáit a geocentrikus rendszerbe átszámítjuk. Ennek módszereivel a következőkben fogunk megismerkedni.

Feladatok:

- Mutassuk be vázlaton a geocentrikus, (vagy korábbi elnevezéssel: abszolút) elhelyezés geometriai tartalmát!
- A mesterséges holdakra végzett mérések miért geocentrikus koordinátákat eredményeznek?
- Mi az előnye és a hátránya a geocentrikus elhelyezésnek?
- Mi a feltétele annak, hogy az alapfelületet geocentrikus elhelyezésbe hozzuk?

43. Átszámítás különböző vonatkoztatási rendszerek között

Bár, mint láttuk, az elvi és gyakorlati lehetőség fennáll közös *geocentrikus koordináta-rendszerben* egységes geodéziai világhálózat kialakítására, a jelenlegi geodéziai gyakorlat, egyelőre még széles körben, használ *helyi* (önkényes vagy relatív) *elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidokat*. Mindaddig, amíg ez az állapot fennáll, fel kell készülni arra, hogy egyes helyi rendszerekben megadott (φ, λ, h) ellipszoidi földrajzi koordinátákat, vagy (ξ, η, N) függővonal-elhajlás összetevőket és/vagy geoid-ellipszoid távolságokat másik vonatkoztatási rendszerbe is át tudjunk számítani.

Hasonló igény merül fel a geodéziai gyakorlatban akkor is, amikor ugyanazon geodéziai alaphálózat pontjainak koordináta-számításához bevezetett geodéziai dátumot később, valamilyen okból, újabbra kívánjuk felcserélni. Ilyenkor elképzelhető, hogy a korábbi vonatkoztatási ellipszoid számára az újabb csillagászati-geodéziai mérések eredményeinek figyelembevételével korszerűbb elhelyezési adatokat számítva megváltoztatjuk ennek elhelyezését. De az is lehetséges, hogy egyidejűen más méretű és alakú alapfelületet (pl. újabb nemzetközi ellipszoidot) is be kívánunk vezetni. Az a változat is gyakori a geodéziai gyakorlatban, hogy valamely kiszámított geodéziai hálózat korábban felvett vonatkoztatási ellipszoidját kívánjuk korszerűbbel felcserélni. A mai gyakorlatban egyre többször válik szükségessé valamely helyi elhelyezésű rendszerből geocentrikusba, vagy fordítva, átszámítani.

Mindezen feladatokat gyűjtőnéven *dátummódosításnak* nevezzük.

431. A dátummódosítás hatásainak kiszámítása

A dátummódosítás valójában koordináta-transzformációt jelent a pontjaink térbeli derékszögű koordinátái között. Ezért a dátummódosítás hatásainak kiszámításához a kiinduló összefüggéseket térbeli derékszögű és az ellipszoidi földrajzi koordináták közötti – a koordináta-rendszerek tárgyalásakor már megismert – összefüggések képezik.

A továbbiakban egyelőre feltételezzük, hogy a vonatkoztatási rendszereink koordináta-tengelyei *egymással párhuzamosak*, és így az átszámításokban *csak párhuzamos eltolásokat veszünk figyelembe*.

Vezessük be a következő jelöléseket a térbeli derékszögű és az ellipszoidi földrajzi koordináták közötti transzformáció leírására:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r}(\varphi, \lambda, h; a, f) = \begin{bmatrix} (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ \left[N(1-e^2)+h\right]\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad (431.1)$$

ahol

$$N = a(1-e^2\sin^2\varphi)^{-1/2} \qquad (431.2)$$

itt az ellipszoid harántgörbületi sugara és $e^2 = 2f - f^2$ az első numerikus excentricitás négyzete.

Szükségünk van még a (431.1) inverz függvényére is, amit a következőképpen fogunk jelölni:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \lambda \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{r}^{-1}(x, y, z; a, f) = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg}\dfrac{z + e'^2\, b\sin^3\theta}{p - e^2 a\cos^3\theta} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} \\ \dfrac{p}{\cos\varphi} - N \end{bmatrix}, \qquad (431.3)$$

ahol

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{za}{pb} \qquad (431.4)$$

segédszög, $p = (x^2 + y^2)^{1/2}$ a pontnak a z tengelytől mért távolsága és $e'^2 = e^2/(1 - e^2)$ a második numerikus excentricitás négyzete.

A dátummódosítás hatásainak kiszámítását három részben tárgyaljuk.

431.1 A koordináta-rendszer kezdőpontjának eltolódása

Valamely geodéziai alappont-hálózat tetszőleges P pontjának (φ, λ, h) koordinátáit ismerjük a különböző dátumadatokkal jellemzett 1 és 2 jelű rendszerben. Legyen a feladatunk a különböző méretű, alakú és elhelyezésű két vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontja egymáshoz viszonyított helyzetének (eltolódásának) meghatározása.

A megoldást az előzőekben [431.] ismertetett koordinátaátszámítás segítségével egyszerűen megkaphatjuk azáltal, hogy a (431.1) összefüggés értelemszerű alkalmazásával kiszámítjuk mindkét rendszerben a pontunk térbeli derékszögű koordinátáival a pont ${}_1\mathbf{r}(X, Y, Z)$ és ${}_2\mathbf{r}(x, y, z)$ *helyvektorát.*

$$ {}_1\mathbf{r} = {}_1\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{r}({}_1\varphi, {}_1\lambda, {}_1h; {}_1a, {}_1f) \qquad (4311.1) $$

és

$$ {}_2\mathbf{r} = {}_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{r}({}_2\varphi, {}_2\lambda, {}_2h; {}_2a, {}_2f). \qquad (4311.2) $$

Ezek után a 2 jelű rendszer kezdőpontjának (origójának) az 1 rendszeréhez viszonyított $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ *eltolásvektora* a P pont kétféle helyvektorának

$$ \mathbf{r}_0 = {}_2\mathbf{r} - {}_1\mathbf{r} \qquad (4311.3) $$

különbségeként számítható.

Ezt a megoldást alkalmazhatjuk minden olyan pontra, amelyiknek mindkét rendszerbeli koordinátáit ismerjük. Ez lehet a hálózatunk csillagászati kiindulópontja, vagy bármely másik ilyen pontja.

A gyakorlatban ez a feladat vagy különböző geodéziai dátummal jellemzett *helyi* rendszerek *egymáshoz* viszonyított, vagy valamely helyi rendszer *geocentrikus* elhelyezésének vizsgálata során merül fel.

431.2 Az ellipszoidi földrajzi koordináták átszámítása

Oldjuk meg a fordított feladatot, és számítsuk ki az 1 jelű rendszer ${}_1\mathrm{E}(a, f)$ ellipszoidjára vonatkozó ${}_1(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátákkal jellemzett tetszőleges P földfelszíni pontnak a 2 jelű rendszerbeli ${}_2(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátáit, ha a geodéziai dátum megváltozását az ellipszoidi jellemzők ${}_2\mathrm{E}(a,f)$ új értékével, valamint az ellipszoid geometriai középpontjának $\mathbf{r}_0$ eltolásvektorával adott új helyzetével jellemezzük.

Ez esetben először a (431.1) összefüggés segítségével meghatározzuk a P pont térbeli derékszögű koordinátáit az 1 jelű rendszerben

$$ {}_1\mathbf{r} = \mathbf{r}({}_1\varphi, {}_1\lambda, {}_1h; {}_1a, {}_1f), \qquad (4312.1) $$

majd figyelembe vesszük azt, hogy a pont 2 jelű rendszerbeni helyzetét az

$$ {}_2\mathbf{r} = {}_1\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 \qquad (4312.2) $$

összefüggéssel meghatározva, a (431.3) inverz transzformációval a kívánt eredményhez jutunk:

$$\begin{bmatrix}\varphi\\ \lambda\\ h\end{bmatrix}_2 = \mathbf{r}^{-1}({}_2x,\ {}_2y,\ {}_2z;\ {}_2a,\ {}_2f)\,. \qquad (4312.3)$$

Következő feladatként számítsuk ki, hogy mennyit változnak valamely geodéziai alaphálózat tetszőleges P pontjának az 1 jelű rendszerben ismert ${}_1(\varphi, \lambda, h)$ ellipszoidi koordinátái akkor, ha a dátum megváltozása a P_1 pont 2 jelű rendszerbeli ellipszoidi földrajzi koordinátáinak ismeretében adott.

Ezt a feladatot is egyszerűen megoldhatjuk két lépésben úgy, hogy a [431.1]-ben ismertetett módon először meghatározzuk a vonatkoztatási ellipszoid geometriai középpontjának a 2 jelű rendszerbeni helyzetét (azaz az $\mathbf{r}_0$ eltolásvektort), majd pedig követjük az előző bekezdésekben vázolt számítási eljárást a P pont 2 jelű rendszerbeni ${}_2(\varphi, \lambda, h)$ koordinátáinak számítására.

431.3 A függővonal-elhajlások és a geoidundulációk átszámítása

Számítsuk ki a P tetszőleges hálózati pont (ξ, η) függővonal-elhajlás összetevőinek és N geoid-ellipszoid távolságának megváltozását, ha a geodéziai dátumot a P_1 csillagászati kiindulópont hasonló adataival adjuk meg mind az 1, mind a 2 jelű rendszerben.

Ekkor azt kell figyelembe venni, hogy a pont (Φ, Λ) szintfelületi földrajzi koordinátái és H geoid (tengerszint) feletti magassága a *természetben mért értékek*, amelyek a dátum módosítása miatt nem változnak. Ezért a függővonal-elhajlás (322.2) és (322.3) alapösszefüggéseit és a geoidunduláció értelmezését tekintetbe véve, felírhatjuk azt, hogy

$$\begin{gathered} {}_1\xi + {}_1\varphi = {}_2\xi + {}_2\varphi = \Phi \\ {}_1\eta/\cos\varphi + {}_1\lambda = {}_2\eta/\cos\varphi + {}_2\lambda = \Lambda \\ -\,{}_1N + {}_1h = -\,{}_2N + {}_2h = H. \end{gathered} \qquad (4313.1)$$

Ezekkel az összefüggésekkel mind a P_1 csillagászati kiindulópontban, mind valamely tetszőleges P pontban kapcsolatot teremtünk az ellipszoidi földrajzi koordináták valamint függővonal-elhajlás összetevők és geoidundulációk két különböző geodéziai dátumhoz tartozó értékei között. Ezzel pedig a feladatot visszavezettük az előző pontban mondottakra, azaz az ellipszoidi földrajzi koordináták átszámítására.

*

Mint láttuk, az 1 és a 2 jelű (pl. valamely helyi és geocentrikus vagy más tetszőleges két geodéziai vonatkoztatási rendszerben adott koordináták, függővonal-elhajlások, geoid-ellipszoid távolságok átszámítása megoldható, ha ismerjük legalább egyetlen pont mindkét (pl. a helyi és a geocentrikus) rendszerbeli ellipszoidi koordinátáit vagy függővonal-elhajlás összetevőit és geoid-ellipszoid távolságát.

432. Az átszámítás hét paraméteres megoldása

Az eddigiekben feltételeztük, hogy az egyes helyi elhelyezésű vonatkoztatási ellipszoidok által meghatározott koordináta-rendszerek tengelyei a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulása) koordinátairányaival – következésképpen egymással is – *párhuzamosak.* Ez esetben az egyes koordináta-rendszerek egymástól csak *párhuzamos eltolással* különböznek. Erre az (ideális) esetre vonatkozó koordinátaátszámítási összefüggéseket ismertünk meg az előzőekben [431.].

A geodézia törekszik ennek az elvi állapotnak az elérésére, de a valóságban ezt csak a méréseink megbízhatóságának megfelelő mértékben (jelenleg mintegy $\pm 1''$-en belül) sikerül megvalósítani. A koordináta-tengelyek ilyen mértékű *nem párhuzamosságának* hatása a koordináta-számításra ma már nem elhanyagolható, ezért átszámítási összefüggéseinket is pontosítani kellett.

Így térbeli derékszögű koordináta-rendszerek közötti koordináta-átszámításra jelenleg legelterjedtebben a *Helmert*-féle *hasonlósági transzformációt* használjuk. Ennek megfelelően azt feltételezzük, hogy a szóban lévő két koordináta-rendszer *térbeli elhelyezésben, tájékozásban és méretarányban (is)* különbözik egymástól. Ekkor a két rendszer kapcsolatát az $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ *eltolás-vektor* (három összetevője), a három tengely körüli $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ *elforgatás* és a κ *méretarány különbségi tényező,* összesen tehát 7 paraméter határozza meg.

Ennek megfelelően az 1 jelű $[X,Y,Z]$ és a 2 jelű $[x,y,z,]$ koordináta-rendszer közötti átszámítás az

$$ {}_1\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + (1+\kappa)\,\mathbf{R}\ {}_2\mathbf{r} \qquad (432.1) $$

alakban írható, ahol az átszámítandó pont 1, ill. 2 jelű rendszerbeli koordinátái

$$ {}_1\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad {}_2\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (432.2) $$

és

$$ \mathbf{R} = \mathbf{R}_x(\varepsilon_x) \cdot \mathbf{R}_y(\varepsilon_y) \cdot \mathbf{R}_z(\varepsilon_z) \qquad (432.3) $$

a forgatási mátrixok szorzata. Mivel a tengelykörüli forgatási szögek, mint említettük, ($1''$-nél kisebb) kicsi szögek, a (432.3) az

$$ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix} \qquad (432.4) $$

egyszerűsített alakban írható.

Ezekkel a koordináta-átszámítás 7 paraméteres modellje (amit *Burša-Wolf* modellnek is szoktak nevezni) végülis

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + (1+\kappa)\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \qquad (432.5)$$

A benne szereplő 7 átszámítási paraméter számértékét tapasztalati úton, olyan pontok alapján határozzuk meg, amelyeknek koordinátáit *mindkét rendszerben* ismerjük. Ezekre a pontokra az ismert koordinátákkal a (432.5)-öt felírva, egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldásával az ismeretlen átszámítási paraméterek kiszámíthatók.

Ha csak *egyetlen* ilyen pontunk van, akkor 3 skalár egyenlet felírásával az *eltolás-vektor* (X_0, Y_0, Z_0) három összetevőjét tudjuk meghatározni azzal a feltevéssel, hogy $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, és $\kappa = 0$, azaz, hogy a koordináta-tengelyek párhuzamosak és a két koordináta-rendszer között nincs méretarány különbség. (Ez volt a [431.]-ben tárgyalt eset, amit, tehát – különleges esetként – a 7 paraméteres megoldás is magába foglal.)

Ha van a hálózatunkban legalább *két* olyan pontunk, amelynek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük, akkor a felírható 6 skalár egyenletből az *eltolás vektor* három összetevője mellett, a koordináta-tengelyek nem párhuzamosságát kifejező ε_x, ε_y, ε_z forgatási szögeket is ki tudjuk számítani. Ehhez már csak azt kell feltételezni, hogy $\kappa = 0$, azaz, a két koordináta-rendszer között nincs méretarány különbség. A két rendszer egymáshoz viszonyított helyzetét jellemző 7 paraméter közül a kiszámítandó 6 ismeretlent, természetesen másként is megválaszthatjuk (ha pl. valamelyik mennyiség számértékét már előre ismerjük, vagy megkötjük).

Ha legalább *három, vagy ennél több* olyan pontunk van, amelynek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük, akkor a felírható egyenletekből már mind a 7 átszámítási paraméter számértéke meghatározható, sőt mivel ez esetben „fölös számú" egyenletünk is van, az ismeretlen paraméterek a legkisebb négyzetek módszerével számíthatók. A gyakorlatban arra törekszünk, hogy minél több pont alapján tudjuk az átszámítási paramétereket meghatározni, és azok eloszlása az átszámítandó pontmező (hálózat) teljes területét jól fedje le.

Mivel a gyakorlatban az ismert koordináták mind mérésekből származnak, számolnunk kell azzal, hogy a hálózatunk a mindkét rendszerben ismert koordinátájú pontokra ellentmondásmentesen nem illeszthető rá, vagyis *maradék ellentmondások* lesznek. (A legkisebb négyzetes számítás során éppen ezek négyzetösszegének minimum feltételét írjuk elő.) A maradék ellentmondások elemzésével lehet a hálózat esetleges szabályos hibaforrásait felderíteni. Vektorok alakjában térképi ábrázolásuk sok érdekes következtetésre ad lehetőséget. Minden esetre tudnunk kell, hogy a különbözőségek részben a geodéziai dátum adatokban lévő eltérésekből (a vonatkoztatási ellipszoid egymástól különböző mérete, alakja, elhelyezése, tájékozása), részben pedig a hálózat méréseiben és számításában rejlő szabályos hibákból adódnak.

A mai geodéziai gyakorlatban a 7 paraméteres megoldást kiterjedten használjuk, egyrészt ugyanazon alappont-hálózatnak különböző helyi geodéziai dátumokra átszámítására, másrészt a helyi elhelyezésű (hagyományos) hálózat pontjainak geocentrikus (ITRS, ill. WGS84) rendszerbe, vagy fordítva, pl. GPS-méréssel meghatározott új pontoknak geocentrikusból a helyi rendszerbe átszámítására. Utóbbi esetekben a hálózat mesterséges holdas módszerrel is meghatározott pontjai képezik azokat a pontokat, amelyeknek koordinátáit mindkét rendszerben ismerjük.

44. A Magyarországon alkalmazott geodéziai dátumok és kapcsolataik

A Magyarországon eddig bevezetett vonatkoztatási ellipszoidok geometriai jellemzőit megbízhatósági mérőszámukkal együtt, továbbá az alkalmazott geodéziai dátumok jelölését a *44.1 táblázatban* tüntettük fel.

A *441.1. táblázat*ban a Magyarországon az elmúlt közel két évszázad folyamán kifejlesztett négy országos háromszögelési hálózatunkhoz felvett, ill. nemzetközi együttműködésekhez is kapcsolódó geodéziai dátumok főbb elhelyezési adatait foglaltuk össze.

44.1. táblázat

A Magyarországon alkalmazott vonatkoztatási ellipszoidok geometriai adatai és megbízhatósági mérőszámuk

Geodéziai dátum elnevezése	Vonatkoztatási ellipszoid		
	megnevezése, éve	fél nagytengely (a) [m]	lapultság (f)
OZ1845	Oriani/Zach (1807/1812)	6 376 130	1:310
	Walbeck (1819)	6 376 896 ±123	1:(302,78 ±2,0)
B1860, B1892 (MGI) B1908, B1944 (DHG)	Bessel (1841)	6 377 379,155	1:(299,1528 ±4,7)
ED50, H1966, ED87	Hayford (1909)	6 378 388 ±18	1:(297 ±0,5)
S42/58, FAGH (1972) S42/83	Kraszovszkij (1940)	6 378 245 ±15	1:(298,3 ±0,4)
HD72	GRS67 (1967)	6 378 160	1:298,247 164 27
WGS72	WGS72 (1972)	6 378 135 ±5	1:298,26
ETRS89	GRS80 (1980)	6 378 137	1:298,257 222 101
WGS84	WGS84 (1984)	6 378 137 ±2	1:298,257 223 563

441. Háromszögelési alaphálózataink hagyományos (geometriai) elhelyezései

A *második katonai felmérés* céljára 1807-1869 között létesített háromszögelési hálózat helyszíni és számítási munkáival foglalkozó utasításokat (többek között a geodéziai dátum felvételét is) 1810-ben és 1845-ben adták ki Bécsben. Az 1810-es utasításban a számítás alapfelületéül a *Delambre* által 1802-ben meghatározott ellipszoid adatait használták, de mivel részleteket nem találtunk elhelyezésére vonatkozóan, ezért a táblázatban ezt nem tüntettük fel. Az 1845-ben bevezetett vonatkoztatási ellipszoid nagytengelye az *Oriani* által 1807-ben közzétett ellipszoidé, lapultsága pedig az 1812-ben megjelentetett *Zách*-féle ellipszoidé, ezért használjuk a geodéziai dátum megnevezésére az **OZ1845** jelölést.

441.1. táblázat

A Magyarországon alkalmazott geodéziai dátumok elnevezése és elhelyezési adatai

	Geodéziai dátum elnevezése	Csillagászati kiinduló-pont neve	Ellipszoidi földrajzi		Dátumparaméterek		
			szélesség (φ) [° ' "]	hosszúság (λ) [° ' "]	ξ	η	ζ (N)
1	OZ1845	Bécs(Szent István templom tornya)	48-12-32,75	16-22-35,58	0,00"	0,00"	0,0 m
2	Walbeck	Bécs (régi egyetemi csillagvizsgáló)	48-12-35,50	16-22-49,98	0,00"	0,00"	0,0 m
3	B1860	Gellérthegy (levezetett)	47-29-14,93	19-03-05,67	-3,93"	- 5,91"	0,0 m
4	B1892 (MGI)	Bécs (Hermannskogel)	48-16-15,29	16-17-55,04	0,00"	0,00"	0,0 m
5a		Széchényihegy	47-29-37,53	18-59-31,08	0,00"	0,00"	0,0 m
5b	B1908	Gellérthegy (levezetett)	47-29-09,6380	19-03-07,5533	1,36"	- 7,19"	0,0 m
6	B1944 (DHG)	Gellérthegy (GK)	47-29-15,382	19-02-59,723	-4,38"	- 1,86"	0,0 m
7	H1966	Jobbágyihegy	47-49-55,15	19-42-40,56	- 2,31"	- 5,98"	30,0 m
8	S42	Pulkovo	59-46-18,55	30-19-42,09	+0,16"	- 1,78"	0,0 m
9	FAGH(1972)	Szőlőhegy	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46"	- 1,11"	6,56 m
10	HD72	Szőlőhegy	47-17-32,6156	19-36-09,9865	-2,18"	+0,14"	6,56 m
	ED50	Potsdam (Helmert-torony)	52-22-51,4456	13-03-58,9283	+3,36"	+1,78"	0,4 m
12	ED87	München (Mária-templ.t.)	48-08-22,2273	11-34-26,4862	-2,25"	+3,15"	0,7 m
13	WGS72 (Doppler)	Szőlőhegy (geocentrikus)	47-17-31,60	19-36-05,99	-1,16"	+2,84	40,20 m
14	ETRS89 (~WGS84)	Szőlőhegy (geocentrikus)	47-17-31,6665	19-36-05,9394	-1,23"	+2,88"	42,85 m

A *Walbeck*-ellipszoid volt az alapfelület 1859-1860-ban a *Gellérthegy* kezdőpont ellipszoidi földrajzi koordinátáinak levezetésekor, amelyeket *Bessel*-ellipszoidi koordinátákként fogadtak el. A *Bessel*-féle ellipszoidot több geodéziai dátum **(B1860, B1892(MGI), B1908 és B1944(DHG)**) létesítésekor használták az *1860. évi (második) felsőrendű háromszögelési hálózatunk* számítási munkálataival összefüggésben. (MGI a bécsi Katonaföldrajzi Intézet, DHG a 2. világháborús német katonai rendszer jelölése.)

A II. világháborút követően Magyarország korszerű geodéziai alapjainak létrehozása során két lépésben új I. rendű háromszögelési hálózatot létesítettek. Elsőként láncolatvázat hoztak létre 1948-1952 között, majd a második ütemben a dunántúli és a tiszamenti kitöltő hálózatrész mérésére került sor. Ezekből együttesen az ún. *felületi asztrogeodéziai hálózat*ot (FAGH) alakították ki. Az I. rendű háromszögelési hálózatunk pontjainak koordinátáit több helyi geodéziai vonatkoztatási rendszerben is meghatározták. Az egyes geodéziai dátumokat egyrészt a hálózati méréseknek önálló nemzeti kiegyenlítése keretében vették fel (mint pl. a **H1966** rendszer), másrészt nemzetközi együttműködések során kialakított egységes háromszögelési hálózatok vonatkoztatási rendszereként megadták számunkra. Ez utóbbival összefüggésben kell megemlíteni, hogy az ún. európai szocialista országok 1952-ben határozták el, hogy területükön *egységes asztrogeodéziai hálózat*ot (EAGH) hoznak létre. Az EAGH első kiegyenlítését 1958-ban végezték el, amelynek magyarországi részeként a láncolatvázat fogadták el. Az EAGH58 hálózat geodéziai dátumát a *Pulkovó* pontban 1942-ben elhelyezett *Kraszovszkij*-ellipszoid határozza meg. Az eredményül kapott koordináták vonatkoztatási rendszerét a továbbiakban **S42/58** jelöléssel látjuk el.

A felületi csillagászati-geodéziai hálózatunk méréseinek *önálló nemzeti kiegyenlítését* 1972-ben végezték el, először a *Kraszovszkij*-ellipszoidon, amelyet *Szőlőhegy* pontban helyeztek el úgy, hogy a pont S42/58 rendszerbeli koordinátáit rögzítették. A hálózat pontjai koordinátáinak vonatkoztatási rendszerét **FAGH** rövidítéssel jelöljük.

Célszerűségi okok miatt a hálózatunkhoz 1972-ben új geodéziai dátumot is vezettek be, amely az Egységes Országos Térképrendszer (EOTR) alapjául szolgál még ma is. Ezt a geodéziai dátumot **HD72**-vel jelöljük. Ennek alapfelülete a GRS67 vonatkoztatási rendszer *RE67* jelű forgási ellipszoidja (amit szokásos *IUGG 1967* jelöléssel is említeni), amelyet *Szőlőhegy* pontban úgy vettek fel, hogy az ellipszoidot a geoid magyarországi felületdarabjához *simuló helyzetbe* hozták.

A teljes felületi csillagászati-geodéziai hálózatunkat az 1980-as évek elején bevonták az EAGH 1983. évi újabb kiegyenlítésébe. Ennek vonatkoztatási rendszerét **S42/83**-mal jelöljük.

Végül az 1989. évi politikai változásokat követően hálózatunkat bevonták a nyugat-európai országok **ED87** jelű egységes háromszögelési hálózatába is. A külföldön végzett számítási munkálatok eredményeként nyert ED87 rendszerbeli koordinátákat megkaptuk. Az ED87 alapfelülete a *München* pontban elhelyezett *Hayford*-féle ellipszoid.

Ezzel tehát háromszögelési alaphálózatunk mindkét létező európai regionális hálózat (S42/58, illetve S42/83 és ED87) részévé vált (természetesen valamelyest különböző koordinátákkal).

442. Alaphálózataink elhelyezése mesterséges holdak észlelésével

Az *Egységes Országos Vízszintes Alapponthálózatunk* (EOVA), és később az *Egységes Országos Magassági Alapponthálózatunk* (EOMA) korszerűsítése és továbbfejlesztése céljából stelláris háromszögelési hálózatot és műholdas *Doppler-méréseket* végeztünk az említett hálózatok kiválasztott pontjain az 1980-as évek folyamán. A szóban lévő mérések geodéziai célú hasznosításának elsődleges célja az, hogy az EOVA vonatkoztatási ellipszoidjának (koordináta-rendszerének) a Föld tömegközéppontjához és a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (akkor ennek CIO-BIH megvalósulása) *Z* tengelyéhez viszonyított *geocentrikus térbeli elhelyezkedését* számszerűen megállapítsuk. További cél a hálózat *méretarányának* ellenőrzése valamint finomítása, továbbá a lehetőségekhez képest a hálózatunk esetleges belső *szerkezeti torzulásainak* feltárása volt. A *Doppler*-mérések akkori vonatkoztatási rendszere a geocentrikus **WGS72** volt.

Később a *GPS-technika* széles körű hazai alkalmazása céljából *országos GPS-hálózatot* (OGPSH) létesítettek, amely 1153 pontból áll (ebből 81 egybeesik az I. rendű háromszögelési hálózatunk pontjaival).

Az OGPSH kialakítása 1991-re nyúlik vissza, amikor is Magyarországon 5 ponton végeztek csatlakozó GPS-méréseket az EUREF hálózathoz, majd ezt követően további 19 ponton, létrehozva a *24 pontból álló kerethálózatot*. Ezt a hálózatot sűrítették 1995-97 folyamán további 1129 pont lemérésével. Jelenleg az ún. *aktív GPS-hálózat* kiépítését végzik a FÖMI-KGO munkatársainak irányításával. Az aktív GPS-hálózat célja többek között az állami földmérési feladatok ellátása mellett a térinformatika és a navigáció alkalmazásának segítése.

A GPS-mérések feldolgozásának *geocentrikus* vonatkoztatási rendszere a **WGS84** jelű geodéziai vonatkozási rendszer. (Mint már említettük, a kapott WGS84 koordináták – figyelemmel a meghatározás megbízhatóságára – gyakorlatilag ITRS koordinátáknak is tekinthetők [161.]).

A koordináta-rendszerek tárgyalásakor már azt is említettük, hogy Európa egységes geodéziai-geodinamikai alapjainak kontinentális kiterjedésű fokozatos létrehozása keretében, a korszerű műholdas GPS-technika alkalmazásával, szélső pontosságú 3D hálózatot (EUREF) hoznak létre, melynek ún. kvázi-geocentrikus vonatkoztatási koordináta-rendszerét *Európai Földi Vonatkoztatási Rendszernek* (European Terrestrial Reference System 1989) nevezzük és **ETRS89**-el jelöljük [161.]. (Az ETRS89 jelű vonatkoztatási rendszer is geocentrikus volt, és az 1989.0 epochában egybeesett a WGS84-gyel, azonban ettől az időponttól kezdve az ETRS89 rendszer kezdőpontja a Föld tömegközéppontjától definíció szerint (az európai tábla mozgásával) fokozatosan eltér.)

Ezt a rendszert a tudományos közösség a legalkalmasabb európai geodéziai dátumnak tekinti, melyet az *Európai Bizottság* (European Commission) minden bizonnyal hivatalos geodéziai dátummá fog nyilvánítani adatainak vonatkoztatására. A szakemberek azt ajánlják, hogy a jövőben az ETRS89-et használják az EU tagországain belül a különböző földmérési és térinformatikai termékek és adatbázisok térbeli vonatkoztatására, és támogatják az ETRS89 széles körű alkalmazását valamennyi tagállamon belül. Néhány európai szervezet (a polgári repülés, az ipar egyes területei és a NATO, stb.) már egységesen alkalmazza és néhány EU-tagállamban (pl. Norvégiában) már nemzeti geodéziai dátumként fogadták el.

Az elmondottaknak megfelelően, a legújabban kifejlesztett geodéziai alappont-hálózatunk, az OGPSH koordináta-rendszere a kvázi-geocentrikus ETRS89 rendszer. Ennek a hagyományos (geometriai) háromszögelési hálózatunkkal közös 81 pontja lehetőséget adott a hálózat pontjai HD72 koordinátáinak az ETRS89-be átszámítására is.

Végül a *442.1. táblázatban* bemutatjuk I. rendű háromszögelési alaphálózatunk *Szőlőhegy* csillagászati kiindulópontjának különböző geodéziai dátumokra vonatkozó φ, λ ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság koordinátáit, továbbá ξ, η függővonal-elhajlás összetevőit és *N* geoid-ellipszoid távolság értékeit. Ebből látható, hogy magyarországi viszonylatban mennyit változnak ugyanazon természetbeni pontnak az ellipszoidi koordinátái a dátumadatok különbözősége miatt.

442.1. táblázat

Szőlőhegy I. rendű háromszögelési pont ellipszoidi földrajzi koordinátái és a dátumparaméterek értéke az egyes geodéziai dátumokban

	Geodéziai dátum elnevezése	Ellipszoidi földrajzi		Dátumparaméterek		
		szélesség (φ) [° ' "]	hosszúság (λ) [° ' "]	ξ ["]	η ["]	*N* [m]
1	B1908	47-17-34,07	19-36-14,91	-2,59	-1,60	?
2	H1966	47-17-34,30	19-36-13,12	-2,82	-0,38	30,00
3	S42/58	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46	-1,11	7,01
4	S42/83	47-17-32,946	19-36-11,872	-2,51	-1,15	8,02
5	FAGH (1972)	47-17-32,9010	19-36-11,8224	-2,46	-1,11	6,56
6	HD72	47-17-32,6156	19-36-09,9865	-2,18	+0,14	6,56
7	ED87	47-17-34,4922	19-36-08,8946	-4,14	+0,79	1,12
8	WGS72	47-17-31,60	19-36-05,99	-1,16	+2,84	40,20
9	EUREF89	47-17-31,6665	19-36-05,9394	-1,23	+2,88	42,85

443. Nemzeti vonatkoztatási rendszereink kapcsolatai

Háromszögelési hálózatunk pontjainak többféle geodéziai dátumra vonatkozó koordinátái alapján kiszámítottuk a 7 paraméteres modell [432.] átszámítási paramétereit a különböző magyarországi rendszerek között. A kapott eredményeket a *443.1 táblázat* mutatja.

A meghatározott transzformációs paraméterek számszerű értékei minden esetben szignifikánsak és azt mutatják, hogy geodéziai alaphálózataink vonatkoztatási rendszereinek koordináta-tengelyei egymással nem teljesen párhuzamosak és egymástól az eltolási paraméterek által jelzett távolságban helyezkednek el. A táblázat adatai szerint ezek a távolságok néhány métertől mintegy 130 m-ig terjedő nagyságrendbe esnek úgy, hogy a koordináta-rendszerek kezdőpontjai a geocentrum környezetében, egymástól mintegy 10-150 m-es tartományon belül vannak. A koordináta-tengelyek párhuzamosságát az elmúlt évtizedek mérés- és számítástechnikája mellett 1”-en belül biztosították. Az egyes geodéziai dátumok méretaránya is eltér egymástól. A méretarány-különbségi tényezőkre kapott értékek a földfelszíni távolságokban 1-5 mm eltérést jelentenek km-ként.

443.1 Táblázat

Transzformációs paraméterek és megbízhatósági mérőszámaik

Közös pontok száma	Áttérés a 2-es rendszerből az 1-be	Transzformációs paraméterek														Súlyegység középhibája	Szabadságfok
		Eltolási paraméterek						Méretarány-különbség		Forgatási paraméterek							
		X_0 [m]	m_{Xo} [m]	Y_0 [m]	m_{Yo} [m]	Z_0 [m]	m_{Zo} [m]	κ [ppm]	m_κ [ppm]	ε_z ["]	$m_{\varepsilon z}$ ["]	ε_y ["]	$m_{\varepsilon y}$ ["]	ε_x ["]	$m_{\varepsilon x}$ ["]		
165	**HD72-FAGH**	-34,12	*±0.04*	-53,06	*±0.04*	-72,22	*±0.05*	0,009	*±0.005*	0,137	*±0.001*	0,041	*±0,002*	0,118	*±0,001*	0,01	485
148	**ED87-HD72**	132,20	*±0.71*	28,96	*±0.68*	103,62	*±0.76*	1,036	*±0.073*	0,690	*±0.017*	0,005	*±0,029*	0,397	*±0,022*	0,13	434
148	**ED87-FAGH**	98,02	*±0.73*	-24,14	*±0.7*	31,36	*±0.78*	1,056	*±0.076*	0,827	*±0.017*	0,046	*±0,30*	0,517	*±0,023*	0,14	434
139	**ED87-S42/83**	96,06	*±0.78*	-29,20	*±0.73*	23,37	*±0.84*	2,116	*±0.078*	0,007	*±0.018*	-0,120	*±0,033*	-0,086	*±0,024*	0,13	407
139	**HD72-S42/83**	-35,33	*±0.54*	-57,86	*±0.51*	-80,49	*±0.58*	1,016	*±0.054*	-0,675	*±0.012*	-0,099	*±0,023*	-0,486	*±0,016*	0,09	407
139	**FAGH-S42/83**	-1,12	*±0.53*	-4,74	*±0.49*	-8,25	*±0.57*	0,993	*±0.053*	-0,811	*±0.012*	-0,139	*±0,022*	-0,605	*±0,016*	0,09	407
90	**S42/58-S42/83**	-18,30	*±2.19*	-16,74	*±2.07*	-27,45	*±2.34*	5,342	*±0.225*	-0,075	*±0.052*	0,119	*±0,090*	0,266	*±0,067*	0,34	260
90	**S42/58-ED87**	-114,31	*±1.61*	12,45	*±1.52*	-50,77	*±1.72*	3,214	*±0.166*	-0,078	*±0.038*	0,241	*±0,066*	0,357	*±0,049*	0,25	260
90	**S42/58-HD72**	16,73	*±2.13*	41,36	*±2.01*	52,96	*±2.27*	4,359	*±0.219*	0,603	*±0.050*	0,211	*±0,088*	0,742	*±0,065*	0,33	260
90	**S42/58-FAGH**	-17,49	*±2.15*	-11,76	*±2.03*	-19,29	*±2.30*	4,383	*±0.222*	0,739	*±0.051*	0,251	*±0,089*	0,861	*±0,065*	0,33	260
81	**ETRS89-HD72**	59,31	*±1.24*	-71,52	*±1.23*	-21,98	*±1.34*	1,277	*±0.128*	0,325	*±0.030*	0,432	*±0,051*	0,269	*±0,039*	0,16	243